线性代数　中国科学技术大学 2023 春
初等矩阵

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

定义 (伴随矩阵)

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 称矩阵

$$A^* := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = (A_{ij})^T_{n\times n}$$

为 A 的伴随矩阵.

定理

设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为 n 阶方阵. 则

$$A^*A = AA^* = \det(A)I_n.$$

矩阵可逆的判定条件

定理

设 A 为 n 阶方阵. 则以下几条等价

1. A 可逆 (*i.e.* 存在 X 使得 $AX = I = XA$.);
2. $\det(A) \neq 0$;
3. 存在 X 使得 $I = XA$;
4. 存在 X 使得 $AX = I$.

若以上几条成立, 则 $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} A^*$.

初等变换(6 个) = 初等行变换(3 个) + 初等列变换(3 个)

定义 (初等方阵)

1. 交换单位阵的第 i,j 行 (或 i,j 列) 得

$$S_{ij} := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 0 & & 1 & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & 1 & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

定义 (初等方阵)

2. 将单位阵第 i 行 (或 i 列) 乘以非零常数 λ 得

$$D_i(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

3. 将单位阵的第 j 行的 λ 倍交到第 i 行 (或第 i 列的 λ 倍加到第 j 列) 得

$$T_{ij}(\lambda) := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & \lambda & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

我们称上面定义的三类矩阵为初等矩阵.

定理

1. 对矩阵做初等行变换相当于矩阵左乘一个相应的初等方阵.
2. 对矩阵做初等列变换相当于矩阵右乘一个相应的初等方阵.

证明思路: 将矩阵写成由向量组成的分块矩阵, 然后直接验证.

性质 (初等矩阵总是可逆的，且其逆仍然是初等矩阵)

1. S_{ij} 对称且 $S_{ij}^{-1} = S_{ij}$;
2. $D_i(\lambda)$ 为对角阵且 $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\lambda^{-1})$;
3. $T_{ij}(\lambda)$ 为三角阵, 且 $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$;

特别地，由于可逆矩阵的乘积仍然可逆，我们有任意有限多个初等矩阵的乘积也是可逆的.

根据高斯消元法, 对于任意给定的矩阵 A 我们可以通过初等行变换将其变为阶梯矩阵.

若用初等矩阵来描述这个过程, 则表示存在初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A =: J$$

为阶梯矩阵.

定理

对于任意矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在 m 阶初等方阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 和 n 阶初等方阵 $Q_1, Q_2, \cdots, Q_t$ 使得

$$P_s \cdots P_2 P_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_t = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其中 r 为非负整数.

推论

对于任意矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

问题: 此结果的几何解释, r 的几何意义? 给出两个简单例子.

推论

设 A 为 n 阶方阵. 则 A 可逆当且仅当 A 可以分解为一系列初等方阵的乘积.

推论

设 A 为 n 阶可逆方阵. 则

1. 可对 A 做一系列初等行变换变为最简形式 I.
2. 可对 A 做一系列初等列变换变为最简形式 I.

问题: 如何求逆矩阵?

- 算法原理: 通过初等变换我们可以找到初等矩阵 $P_1, P_2, \cdots, P_s$ 使得 $P_s \cdots P_2 P_1 A = I$. 从而, 我们有

$$A^{-1} = P_s \cdots P_2 P_1.$$

- 具体实现过程: 对矩阵 (A, I) 做行初等变换, 将第一个子矩阵变为单位阵. 则第二个子矩阵自动变为 A 的逆.

$$(A, I) \xrightarrow{\text{行初等变换}} P_s \cdots P_2 P_1 (A, I) = (I, A^{-1}).$$

例

求矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的逆.

思考: 若 A 可逆, 如何求解 $AX = B$?

$$(A, B) \xrightarrow{\text{行初等变换}} P_s \cdots P_2 P_1 (A, I) = (I, A^{-1}B).$$

设 A 为 $m\times n$ 矩阵. 我们将其按 $m=m_1+m_2+\cdots+m_r$ 和 $n=n_1+n_2+\cdots+n_s$ 的拆分方式, 得到如下分块形式

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{pmatrix}=(A_{ij})_{r\times s}.$$

类似于矩阵的初等变换, 我们可以对分块矩阵 A 做相似的操作:

1. 交换分块矩阵的第 i,j 行 (或 i,j 列).
2. 将分块矩阵的第 i 行左乘一个 n_i 阶 (或, 第 i 列右乘一个 m_i 阶) 可逆矩阵.
3. 将分块矩阵的第 i 行左乘一个 $n_i\times n_j$ 矩阵加到第 j 行 (或, 第 i 列右乘一个 $m_i\times m_j$ 矩阵加到第 j 列).

例

若 A 可逆，则

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -A^{-1}B \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}$$

例

设 A,B,I 为 n 阶方阵满足 $BA=0$. 则

$$\begin{pmatrix} I & A \\ B & I \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} I+AB & -A \\ -B & I \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I & A & I & 0 \\ B & I & 0 & I \end{pmatrix} &\xrightarrow[\text{第一行左乘 } B]{\text{第二行减去}} \begin{pmatrix} I & A & I & 0 \\ 0 & I & -B & I \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[\text{第二行左乘 } A]{\text{第一行减去}} \begin{pmatrix} I & 0 & I+AB & -A \\ 0 & I & -B & I \end{pmatrix}\end{aligned}$$

定义 (相抵)

称两矩阵 A, B 相抵, 若存在可逆矩阵 P 和 Q 使得

$$B = PAQ.$$

注: 因可逆矩阵为方阵, 因此要使 $B = PAQ$ 成立, B 和 A 的行列数必须一致.

性质 (相抵的基本性质)

1. 任意矩阵与自身相抵;
2. 若 A 与 B 相抵, 则 B 与 A 也相抵;
3. 若 A 与 B 相抵且 B 与 C 相抵, 则 A 与 C 相抵.

满足上述三条性质的关系称为等价关系。换句话说，上述性质表明相抵为等价关系.

等价关系在集合论中的严谨定义

定义 (等价关系严谨定义)

给定集合 X, 我们称 $X \times X$ 的一个子集为 X 上的一个关系. 设 R 为 X 上的一个关系, 即

$$R \subseteq X \times X.$$

我们称 R 是等价关系, 若 R 满足如下三条性质

- (自反性) 对任意 $x \in X$, 我们有 $(x,x) \in R$;
- (对称性) 对任意 $x, y \in X$, $(x,y) \in R$ 当且仅当 $(y,x) \in R$;
- (传递性) 对任意 $x, y, z \in X$, 若 $(x,y) \in R$, $(y,z) \in R$ 则 $(x,z) \in R$.

此时, 对任意 $x, y \in X$, 若 $(x,y) \in R$, 则称x 等价于 y; 否则, 称x 不等价于 y.

例

例子：老乡；同号；同余等价关系；
反例：朋友；父子；异号

对等价关系, 我们有如下通俗理解:

定理

给定集合某上的一个等价关系等价于给定这集合上的一个拆分.

证明思路:

- 给定 X 上一个等价关系 R. 我们称 X 的子集

$$[x] := \{y \in X \mid (x, y) \in R\} \subseteq X$$

  为 x 在等价关系 R 下的等价类.
  - 对任意 $x, y \in X$, $[x] \cap [y] \neq \emptyset$ 当且仅当 $[x] = [y]$.
  - 集合 X 为一些等价类的无交并.
- 反之, 给定集合 X 的一个拆分 X. 我们如下定义一个等价关系 R: 对于任意 $x, y \in X$, $(x, y) \in R$ 当且仅当 x, y 落入同一个拆分子集中.

按照相抵关系, 我们将全体 $m \times n$ 矩阵分成若干个两两不交的等价类.

基本问题:

1. 如何判定两个矩阵是否相抵?
2. 在每个等价类中有没有最简单的表达形式?

定理

对于任意矩阵 $A \in F^{m\times n}$, 存在 m 阶可逆矩阵 P 和 n 阶可逆矩阵 Q 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

其中非负整数 r不依赖于 P 和 Q 的选取.